Waarom neem je best een gradenboog mee op je strandwandeling?

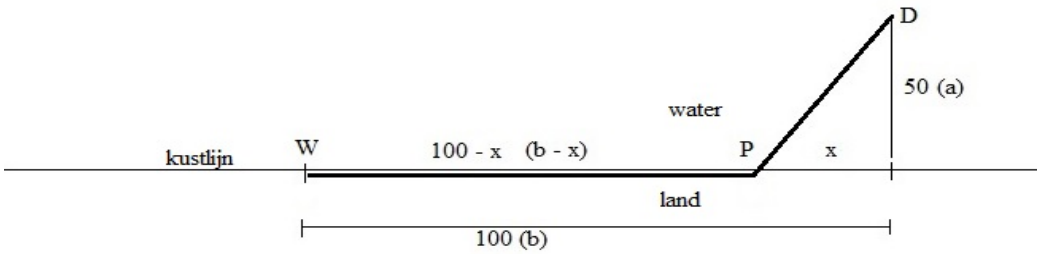
Een van de klassieke oefeningen op extremumproblemen met irrationale functies komt neer op:
"Een wandelaar (W) langs de kustlijn ziet 100 m verder en op 50 m (loodrecht t.o.v. de kustlijn) een drenkeling (D). Hij kan lopen langs de kustlijn aan een snelheid van 4 m/s en kan zwemmen aan een snelheid van 1 m/s. Hoe moet hij zo snel mogelijk bij de drenkeling komen om hem te redden?" . Zie : lkwadraat.com/content/extr3/drenkeling6.html
Hij kan de kortste weg nemen door ter plaatse in het water te springen en door de gehele afstand te zwemmen, tegen weliswaar een lage snelheid. Hij kan echter ook de kustlijn volgen tot op de (loodrechte) hoogte van de drenkeling om zo lang mogelijk met een grote snelheid te kunnen lopen, maar dan maakt hij wel een grote omweg. Hij loopt een groot stuk langs de kustlijn om dan ergens in het water te springen en naar de drenkeling te zwemmen. De plaats (P) waar hij in het water springt wordt bepaald door de waarde x_p en deze kan men dan berekenen door de tijdsfunctie op te stellen en hiervan de afgeleide gelijk aan nul te stellen

$$t(x) = \frac{100 - x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 2500}}{1}$$

en

$$t'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2500}} = 0$$

waaruit x_P = 12,91



We kunnen deze functie veralgemenen door de afstand van de drenkeling tot de kustlijn *a* en de lengte van de kustlijn *b* te noemen. De zwemsnelheid stellen we gelijk aan *v* en de verhouding van de loopsnelheid en de zwemsnelheid noemen we *k.*

De functie wordt dan

$$t(x) = \frac{b - x}{k.v} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v}$$

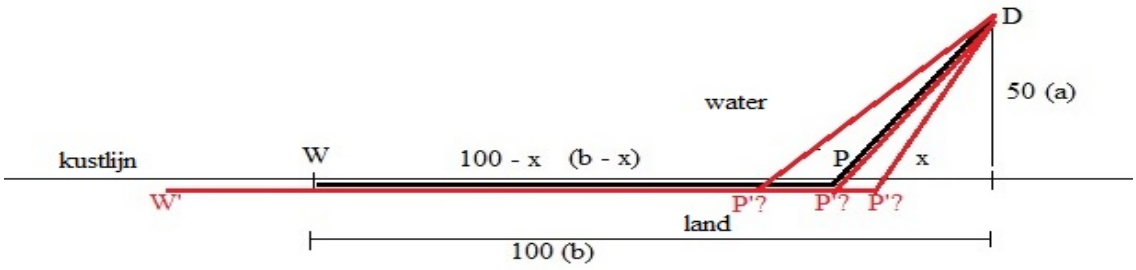
en

$$t'(x) = \frac{1}{v}.\left(-\frac{1}{k} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = 0$$

waaruit

$$x_P = \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Ik vraag dan aan de leerlingen wat er gebeurt met het punt P als de wandelaar meer dan 100 m (dus meer naar links) van de drenkeling is verwijderd.
1. Zal het punt P dan ook meer naar links verschuiven? En is dat dan evenveel als W is verschoven of toch iets minder?
2. Zal het punt P niet verschuiven?
3. Zal het punt P naar rechts verschuiven, omdat de afstand langs de kust nu groter is en de wandelaar deze afstand dus met een grotere snelheid kan afleggen?



De meeste leerlingen kiezen steevast voor optie 1. Het punt P zal ook naar links verschuiven, maar wel minder dan W is verschoven.
Het juiste antwoord is echter optie 2.
De waarde *b* valt weg in de afgeleide functie en dat ziet men aan de waarde van x_p. Deze is inderdaad onafhankelijk van *b*.
Als we logisch nadenken komt dit hier op neer: als men links van W (bv. in W') vertrekt volgt men de kustlijn om zo snel mogelijk W te bereiken, en van hieruit hebben we de snelste route bepaald.

Uit $x_P = \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$ en $|PD| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{k^2-1}} = \frac{ak}{\sqrt{k^2-1}}$ volgt ook dat de hoek $\hat{P}$ gelijk is aan $\text{Bgcos}\frac{x_p}{|PD|} = \text{Bgcos}\frac{1}{k}$ en dat deze hoek, die onafhankelijk van *b*, dus ook onafhankelijk is van de waarde van *a*.
Merk op *dat deze hoek nog weinig verandert als x > 5.* (*)

Maar hoe loopt de snelste weg als we ons korter dan dit punt P (dit is rechts van het punt P) bij de drenkeling bevinden. Vermits de waarde van *b* geen rol speelt, vinden we hetzelfde nulpunt van de afgeleide, dus moeten we duidelijk een omweg maken langs het punt *P*, merkt een leerling op. Dit klopt uiteraard niet.
We moeten de functie even aanpassen. Een afstand is steeds positief, dus wordt de functie :

$$t(x) = \frac{|b-x|}{k.v} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v}$$

Dus

$$t(x) = \frac{b-x}{k.v} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} \text{voor } x < b \text{ en}$$
$$t(x) = \frac{x-b}{k.v} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} \text{voor } x > b$$

en met als afgeleiden

$$t'(x) = \frac{1}{v}.\left(-\frac{1}{k} + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) \text{voor } x < b \text{ en}$$
$$t'(x) = \frac{1}{v}.\left(\frac{1}{k} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \text{voor } x > b$$

Als $x > b$ heeft de afgeleide geen nulpunt vermits $k > 1$ en $x > 0$.

De afgeleide in het punt $x = b$ bestaat niet, want

$$\lim_{x \to b^-} t'(x) = \frac{1}{v}.\left(-\frac{1}{k} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right) \text{ en}$$
$$\lim_{x \to b^+} t'(x) = \frac{1}{v}.\left(\frac{1}{k} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)$$

De linker- en rechterafgeleide voor *x=b* zijn us verschillend, wat betekent dat de er een knik in de grafiek van deze tijdsfunctie zit.

Deze rechterafgeleide is steeds positief.
De linkerafgeleide heeft als nulpunt $b = \frac{a}{\sqrt{k^2-1}} = x_p$

De tekentabel voor de afgeleide ziet er dus in de twee gevallen als volgt uit:

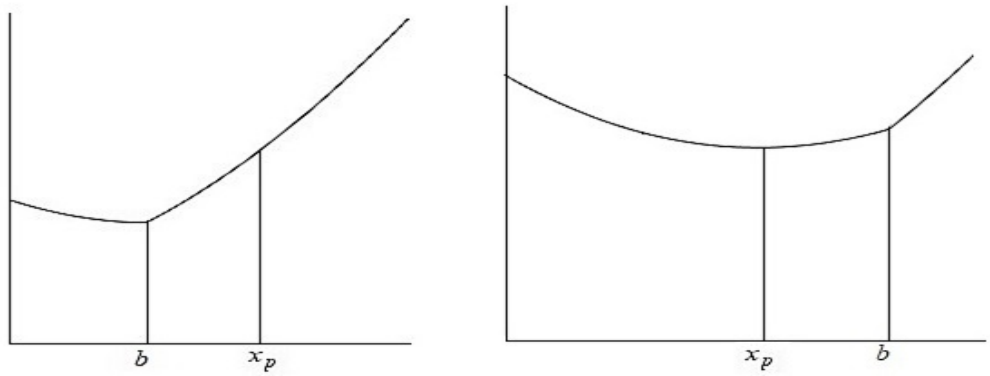
$b < x_p$

x		b		x_p	
$t'(x)$	-	|	+	+	+
$t(x)$	↘	knik	↗	↗	↗

$b > x_p$

x		x_p		b	
$t'(x)$	-	0	+	|	+
$t(x)$	↘	min	↗	knik	↗

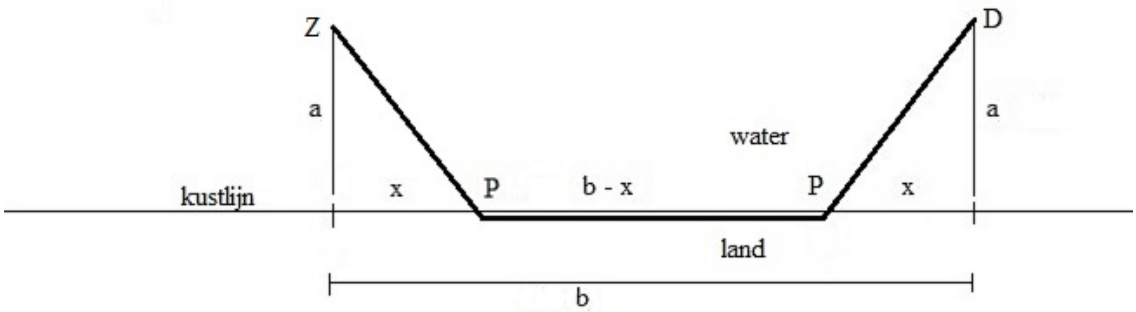
En de grafieken zien er dan in beide gevallen uit als volgt :



De tweede grafiek heeft naast een gewoon minimum nog een knikpunt (dit is geen minimum) met links en rechts een afgeleide met hetzelfde teken maar verschillende absolute waarde. Het is alsof de grafiek tijdens het stijgen in het punt *b* een extra "boost" krijgt (om het in coronatermen uit te drukken). Praktisch betekent dit hier dat de redder – in plaats van in de richting van de drenkeling te lopen en dan in het water te springen – eerst in de tegengestelde richting loopt, weg van de drenkeling, voordat hij in het water springt. Uiteraard zal de tijd dan plots veel sneller toenemen.

Als we dus verder van de drenkeling staan dan het punt P ($b > x_p$) hebben we een gewoon minimum voor $x = x_p$ en deze waarde is onafhankelijk van b.
Staan we rechts van het punt P ($b < x_p$) dan moeten we rechtstreeks naar de drenkeling zwemmen om hem zo snel mogelijk te bereiken.
Deze functie is ook overal convex vermits de tweede afgeleide ($t''(x) = \frac{a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$) steeds positief is.

Een ander mooi probleem is het volgende :
"*Een zwemmer Z ziet op een afstand van b meter voor zich een drenkeling D die even ver als hij op een afstand a meter van de kustlijn zwemt. (We nemen hier dezelfde afstand a om twee variabelen minder te hebben.) Ook hier geldt dat de loopsnelheid over de kustlijn k-maal groter is dan de zwemsnelheid (v). Is het voordelig om nog even naar de kustlijn te zwemmen, een afstand te lopen tegen een hogere snelheid en dan terug in het water te springen, naar de drenkeling toe?*" . Zie : lkwadraat.com/content/extr3/drenkeling5.html



De functie die de tijd weergeeft is gelijk aan (we veronderstellen dat $b > 2x$)

$$t(x) = \frac{b - 2x}{k.v} + \frac{2\sqrt{x^2 + a^2}}{v}$$

en

$$t'(x) = \frac{1}{v}.\left(-\frac{2}{k} + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)$$

Deze functie is het dubbele van de vorige functie: eerst moeten we zo snel mogelijk van uit het water naar de kust, om even later weer zo snel mogelijk van de kustlijn naar de drenkeling te zwemmen

Dus we vinden eveneens een minimale tijd als $x_P = \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$ voor de beide punten P.

Maar de vraag is hier dus: is het wel voordelig om naar de kustlijn te zwemmen en daarna weer terug? Dit hangt er natuurlijk van af hoe ver de zwemmer en de drenkeling zich van de kustlijn bevinden (a) en hoe ver de drenkeling van de zwemmer verwijderd is (b). Het spreekt voor zich dat het niet meer voordelig is om naar de kust te zwemmen als de verhouding $\frac{a}{b}$ te groot is.

Hiervoor moeten we de hierboven gevonden optimale tijd kleiner zijn dan de tijd die nodig is om rechtstreeks naar de drenkeling te zwemmen. Deze is gelijk aan $\frac{b}{v}$.

$$\frac{b - 2x_p}{k.v} + \frac{2\sqrt{x_p^2 + a^2}}{v} < \frac{b}{v} \text{ met } x_p = \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Het is het eenvoudigst om deze ongelijkheid op te lossen naar b en we weten dat a, b en v steeds positief zijn en $k > 1$.

$$\frac{b}{k} - b < \frac{2x_p}{k} - 2\sqrt{x_p^2 + a^2}$$

$$b(1 - k) < 2(x_p - k\sqrt{x_p^2 + a^2})$$

en met $x_p = \frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$ wordt dit :

$$b > \frac{2\left(\frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}} - k.\frac{a.k}{\sqrt{k^2 - 1}}\right)}{1 - k}$$

$$b > \frac{2a(k + 1)}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

$$b > 2a.\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

en

$$a < \frac{b}{2}.\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$$

Merk op dat het rechtstreeks oplossen van a en k uit de oorspronkelijke ongelijkheid voor heel wat meer moeilijkheden had gezorgd.

Er is dus een lineair verband tussen de afstand tussen de twee zwemmers en hun afstand tot de kustlijn.
De invloed van snelheidsverhouding k daarentegen neemt sterk af naarmate de verhouding toeneemt en *verandert nog weinig als* $k > 5$. (**)

De verhouding $\frac{a}{b}$ moet steeds kleiner zijn dan $\frac{1}{2}$. Naarmate de snelheidsverhouding groter wordt, wordt a groter, maar moet dus kleiner blijven dat de helft van b.

Door dit extremumprobleem wat verder uit te diepen, stellen we eerst vast dat het verrassend is dat de afstand tussen de wandelaar en de drenkeling geen rol speelt en dat eigenlijk enkel de hoek tussen de kustlijn en de richting naar de drenkeling van belang is.

Door de waarde van b ook kleiner dan de kritische waarde x_p te nemen bekomen we een functie die altijd een knikpunt vertoont voor $x = b$, en afhankelijk van de waarde van b ook een normaal minimum heeft voor $x = x_p$

Het tweede probleem levert een mooie ongelijkheid met 3 variabelen op, die enkel soepel op te lossen is door op te lossen naar de juiste variabele, in dit geval naar a. Hieruit kunnen dan de andere twee variabelen gemakkelijk afgeleid worden.

De reactie van de leerlingen zal natuurlijk zijn dat de drenkeling al lang zal verdronken zijn voordat al deze waarden berekend zijn.

Maar uit bovenstaande (*) en (**) volgt dat er eigenlijk niet veel berekeningen nodig zijn. We gaan er van uit dat voor een gemiddelde persoon de loopsnelheid ongeveer 6-maal groter is dan de zwemsnelheid ($k = 6$)
Als de redder dan zelf in het water is, zwemt hij best naar de kustlijn als de afstand tot de drenkeling (b) ca. 20% groter is dan het dubbele van zijn afstand tot de kustlijn (a) :

(**) $$b > 2a.\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2a.\sqrt{\frac{6+1}{6-1}} \approx 2a.1{,}20.$$

En in beide gevallen moet de redder er voor zorgen dat de hoek tussen de kustlijn en de richting van de drenkeling ongeveer gelijk is aan

(*) $$\text{Bgcos}\frac{1}{k} = \text{Bgcos}\frac{1}{6} = \text{ca.}\,80°$$

om zo snel mogelijk bij de drenkeling te geraken.

Met een goed inschattingsvermogen voor afstanden en met een gradenboog op zak ben je dus altijd zo snel mogelijk bij een eventuele drenkeling.